超平面配置とトーリック多様体(トーリック多様体の幾何と凸多面体)

AUTHOR(S):

前田, 真美

CITATION:

前田, 真美. 超平面配置とトーリック多様体(トーリック多様体の幾何と凸多面体). 数理解析研究所講究録 1996, 934: 68-78

ISSUE DATE:

1996-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60006

数理解析研究所講究録
934巻 1996年 68-78

超平面配置とトーリック多様体

前田 真美 (Masami Maeda)
東北大学大学院理学研究科

1 序

有限次元実ベクトル空間において, 有限個の超平面でその空間を分割したものを超平面配置と言う. 有理数体上定義された有限個の相異なる超平面であって, 全て原点を通り, しかも共通点が原点のみであるようなものからなる超平面配置からは, 有限で破れのない扇を自然に得ることができる. そのような扇から構成されるトーリック多様体には, どのような特徴があるのかを考える.

まず, そのような扇に対応するトーリック多様体は射影的であり, zonotope と呼ばれる凸多面体が対応することが知られている. そこで, zonotope の特徴付けから, 得られたトーリック多様体の特徴を考える. zonotope とは, 有限個の線分の Minkowski 和で表わされる凸多面体であるが, 線形写像による超立方体の像としても定義することができ, このことから次のことが言える.

定理 1.1 $X := T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ を超平面配置から構成されるトーリック多様体とすると, ある自然数 s があって, $N' \cong \mathbf{Z}^s$ の $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^s$ に対応する扇を Δ' とすると, 扇の写像 $\varphi : (N,\Delta) \to (N',\Delta')$ に付随するトーリック多様体間の有限同変正則写像

$$\varphi_* : X \to (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^s$$

がある. さらに,

$$\{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\} = \{\sigma' \cap \varphi(N_{\mathbf{R}}) \mid \sigma' \in \Delta'\}$$

が成り立つ. (すなわち, 超平面配置から得られる扇は, より高次元の座標超平面配置 (互いに直交し原点を通る次元個の超平面のみからなる超平面配置) を, ある部分空間に制限したものと見ることができる.)

この写像がいつ閉埋め込みになるかについても調べたが, 例えば得られたトーリック多様体が非特異の時は閉埋め込みになることがわかった.

最近, quiver(多重辺を許す有向グラフ) から組織的に (2 通りの) 超平面配置が構成できることがわかり, さまざまな研究がなされてきているが, そのような超平面配置から得られるトーリック多様体の幾何的な構造が, quiver に関する組合せ論的情報により記述できる見込みがある. quiver から得られる超平面配置は非常に特殊なものであるが, 点と辺だけからなる quiver によって対応するトーリック多様体の構造が記述できれば, 高次元の新しい多様体を構成する際に極めて有効な手段を提供すると思われる.

2 超平面配置から構成されるトーリック多様体

この節では, 超平面配置から構成されるトーリック多様体を定義し, その多様体から $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ のいくつかの直積への同変正則写像が存在することを示す. さらに, その写像が閉埋め込みになっている条件についても考察する.

N を, 階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群, $M := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ をその双対 $\mathbf{Z}$ 加群とすると, 自然な双線形写像 $\langle\, ,\, \rangle : M \times N \to \mathbf{Z}$ がある. $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, $M_{\mathbf{R}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ を, 実数体 $\mathbf{R}$ への係数拡大とする.

定義 2.1 $\sigma \in N_{\mathbf{R}}$ が有理強凸多面錐であるとは, N の有限個のいくつかの元 $n_1, n_2, \ldots, n_s$ により,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{R}_{\geq 0}\, n_i$$

と表わされ, さらに $\sigma \cap (-\sigma) = 0$ を満たすことを言う. 但し, $\mathbf{R}_{\geq 0}$ は非負実数全体を表わすものとする.

定義 2.2 有理強凸多面錐 σ の双対有理凸多面錐 $\sigma^{\vee} \subset M_{\mathbf{R}}$ を

$$\sigma^{\vee} := \{x \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle x, y\rangle \geq 0, \ \ \forall y \in \sigma\}$$

とする.

定義 2.3 σ の部分集合 τ が σ の面であるとは, ある $m_0 \in \sigma^{\vee}$ により,

$$\tau = \sigma \cap \{m_0\}^{\perp} := \{y \in \sigma \mid \langle m_0, y\rangle = 0\}$$

と表わされるときを言う. このとき $\tau \prec \sigma$ と書く.

定義 2.4 N の扇 Δ とは, $N_{\mathbf{R}}$ の有理凸多面錐の空でない集まりであって, 以下の条件を満たすもののことである.

(i) 任意の $\sigma \in \Delta$ に対し, σ の面は Δ の元である.

(ii) 任意の $\sigma, \sigma' \in \Delta$ に対し, $\sigma \cap \sigma'$ は σ と σ' の面である.

定義 2.5 N の扇 Δ が破れがないとは,

$$|\Delta| := \bigcup_{\sigma\in\Delta} \sigma = N_{\mathbf{R}}$$

となることを言う.

定義 2.6 N の有限で破れのない扇 Δ が, 超平面配置で決まる扇であるとは, 有限個の $N_{\mathbf{R}}$ の超平面 $H_1, H_2, \ldots, H_s$ が存在して,

$$|\,\Delta(r-1)\,| \;:=\; \bigcup_{\sigma\in\Delta(r-1)} \sigma \;=\; \bigcup_{i=1}^{s} H_i$$

となることと定義する. 但し, $\Delta(r-1) = \{\sigma \in \Delta \mid \dim \sigma = r-1\}$ である.

このとき明らかに, $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_s = \{0\}$ が成立する. 逆に, $\mathbf{Q}$ 上定義された $N_{\mathbf{R}}$ の有限個の相異なる超平面 $H_1, H_2, \ldots, H_s$ であって, $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_s = \{0\}$ となるものが与えられれば, $N_{\mathbf{R}} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} H_i$ の連結成分の閉包集合の集まりを $\Delta(r)$ とする破れのない有限扇 Δ が決まる.

命題 2.7 (cf. [O88, pp.85–86]) Δ が超平面配置で決まる扇のとき, Δ に付随するトーリック多様体 $X := T_N\,\mathrm{emb}(\Delta)$ は射影多様体である. すなわち, h に対応する X の Cartier 因子 $D_h := -\sum_{\rho\in\Delta(1)} h(n(\rho))V(\rho)$ は豊富である. 但し, $n(\rho)$ は $\rho \cap N$ の原始的元, $V(\rho)$ は $\rho \in \Delta(1)$ に対応する X の余次元 1 の T_N 不変既約部分多様体である.

h に対応する凸多面体の構造を調べる. $h_i := -\,|\,\langle m_i, \;\rangle\,|$ とすると $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_s$ である. $\square_{h_i} := \{m \in M_{\mathbf{R}} \mid \langle m, n\rangle \geq h(n),\quad \forall n \in N_{\mathbf{R}}\}$ は $-m_i, m_i$ を端点にもつ線分 $[-m_i, m_i]$ である. すると, $\square_h = \square_{h_1} + \square_{h_2} + \cdots + \square_{h_s} = [-m_1, m_1] + [-m_2, m_2] + \cdots + [-m_s, m_s]$ (Minkowski 和) となる. 有限個の (原点対称とは限らない) 線分の Minkowski 和で表わされる凸多面体を zonotope と言う. $\square_h$ は r 次元の zonotope である.

注 2.8 $\mathbf{Q}$ 上定義された $N_{\mathbf{R}}$ の有限個の相異なる超平面 $H_1, H_2, \ldots, H_s$ が扇を決めるための必要十分条件は $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_s = \{0\}$ が成立することである．すなわち $m_i \in M$ を $H_i{}^{\perp} \cap M$ の生成元のひとつとするとき $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ が $\mathbf{R}$ 上 $M_{\mathbf{R}}$ を生成することである．言い換えると，$\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ が生成する $\mathbf{Z}$ 部分加群が M の指数有限な部分加群となることである．

命題 2.9 (cf. [M71, p.92]) zonotope P の任意の面 F は，次のように表わされる：

$$F = \sum_{i \in I \setminus J} \varepsilon_i m_i + \sum_{j \in J} [-m_j, m_j]$$

ここで，$I := \{1, 2, \ldots, s\}$，$J \subset I$，$\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ である．従って F も zonotope である．

命題 2.10 D_h は大変豊富である．すなわち，D_h に付随する射影空間への同変正則写像 $\varphi_h : X \to \mathbf{P}^{|\Box_h \cap M|}(\mathbf{C})$ は閉埋め込みである．

証明 $\Box_h$ の任意の頂点は $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s \in \{1, -1\}$ を用いて，$\varepsilon_1 m_1 + \varepsilon_2 m_2 + \cdots + \varepsilon_s m_s$ と表わされる．必要なら m_i の符号を替えて，その頂点を $-m_1 - m_2 - \cdots - m_s$ としてよい．このとき，対応する Δ の r 次元有理凸多面錐を σ とすると，

$$\sigma^{\vee} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{R}_{\geq 0}\, m_i$$

が成り立つことがわかる．D_h が大変豊富であることを言うには，$\Box_h \cap M + (m_1 + m_2 + \cdots + m_s)$ が，半群として $\sigma^{\vee} \cap M$ を生成することを示せばよい (cf. [O88, p.82, Theorem 2.13])．

$\sigma^{\vee} \cap M$ は，$m_1, m_2, \ldots, m_s$ と，

$$A \ := \ \{m \in M \mid m = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i \ ; \ 0 \leq a_i \leq 1, \ \ 1 \leq i \leq s\}$$

で生成される．m を A の元とすると，ある a_i $(0 \leq i \leq 1)$ があって，$m = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i$ と書ける．すると，

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i = \sum_{i=1}^{s} (a_i - 1) m_i + \sum_{i=1}^{s} m_i$$

であるが，$-1 \leq a_i - 1 \leq 0$ であるから，$\sum_{i=1}^{s} (a_i - 1) m_i \in \Box_h \cap M$ である．よって，$\sigma^{\vee}$ の生成元が $\Box_h \cap M + \sum_{i=1}^{s} m_i$ の元で書けるから，$\Box_h \cap M + \sum_{i=1}^{s} m_i$ は，半群として $\sigma^{\vee} \cap M$ を生成する． ∎

定理 2.11 (cf. [B69, p.330, 3.3.Theorem]) r (≥ 2) 次元凸多面体 P に対し, 次は同値である.

(i) P は zonotope である.

(ii) ある自然数 s があって, s 次元ベクトル空間 $V := \bigoplus_{i=1}^{s} e_i^*$ から $M_{\mathbf{R}}$ への全射線形写像があり, P は s 次元超立方体 $P' := \sum_{i=1}^{s}[-e_i^*, e_i^*]$ の像になっている.

(iii) P の任意の 2 次元面は, 適当に平行移動すると原点対称である.

(iv) $r \geq 3$ のとき, P の任意の $(r-1)$ 次元面は zonotope である.

(v) $2 \leq j \leq r-1$ なる自然数 j があって, P の任意の j 次元面は zonotope である.

定理 2.11 における (i) と (ii) の同値性を, 超平面配置で決まる扇に適用してみよう. $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_s^*\}$ を基底にもつ s 次元自由 $\mathbf{Z}$ 加群を M' とする. N' をその双対 $\mathbf{Z}$ 加群とし, $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ をその双対基底とする. 写像 $h' : N' \to \mathbf{Z}$ を $N' \ni n' \mapsto -\sum_{i=1}^{s} \mid \langle e_i^*, n' \rangle \mid$ とする. $e_i^* \mapsto m_i$ により全射線形写像$\varphi^* : M'_{\mathbf{R}} \to M_{\mathbf{R}}$ が定義される. $M'_{\mathbf{R}}$ における s 次元単位立方体 $\square_{h'}$ を $[-e_i^*, e_i^*]$ $(1 \leq i \leq s)$ の Minkowski 和とすると, $\varphi^*(\square_{h'}) = \square_h$ である. φ^* は自然に M' から M への余核有限な準同型写像になっている. 従って

$$N \ni n \mapsto \sum_{i=1}^{s} \langle m_i, n \rangle e_i \in N'$$

により単射線形写像 $\varphi : N \to N'$ を得る. $\square_{h'}$ に対応する N' の扇を Δ' とする.

補題 2.12 τ' を $N'_{\mathbf{R}}$ の有理強凸多面錐, τ を $N_{\mathbf{R}}$ の有理強凸多面錐とする. 全射線形写像 $\varphi^* : M'_{\mathbf{R}} \to M_{\mathbf{R}}$ により, $\varphi^*((\tau')^\vee) = \tau^\vee$ が成立すれば, 対応する双対ベクトル空間の間の単射線形写像 $\varphi : N_{\mathbf{R}} \to N'_{\mathbf{R}}$ により,

$$\varphi(\tau) = \tau' \cap \varphi(N_{\mathbf{R}})$$

となる.

定理 2.13 上で述べた写像 $\varphi : N \to N'$ は扇の写像 $\varphi : (N, \Delta) \to (N', \Delta')$ になっている. さらに,

$$\{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\} = \{\sigma' \cap \varphi(N_{\mathbf{R}}) \mid \sigma' \in \Delta'\}$$

が成り立つ.

証明 任意の $\tau \in \Delta$ に対し, $I = \{1, 2, \ldots, s\}$ の部分集合 J を,

$$J := \{j \mid 1 \leq j \leq s, \ \tau \subset \{m_j\}^\perp\}$$

とし, $i \in I \setminus J$ に対して $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ を $\tau \subset \{\varepsilon_i m_i\}^\vee$ とすると,

$$\tau = \{\sum_{i \in I \setminus J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_i m_i + \sum_{j \in J} \mathbf{R}\, m_j\}^\vee$$

となる. 実際, $\tau \in \Delta(k)$ は, $\Box_h$ のある $(r-k)$ 次元面

$$F = -\sum_{i \in I \setminus J} \varepsilon_i m_i + \sum_{j \in J} [-m_j, m_j]$$

により, $F^\dagger$ と表わされ,

$$\tau = F^\dagger = \{\varepsilon_i m_i, \pm m_j,\ \ i \in I \setminus J,\ \ j \in J\}^\vee = \{\sum_{i \in I \setminus J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_i m_i + \sum_{j \in J} \mathbf{R}\, m_j\}^\vee$$

である.

$\tau' := \sum_{i \in I \setminus J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_i e_i \in \Delta'$ とすると, $(\tau')^\vee = \sum_{i \in I \setminus J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_i e_i^* + \sum_{j \in J} \mathbf{R}\, e_j^*$ であるから, $\varphi^*((\tau')^\vee) = \tau^\vee$ である. 補題 2.12 により, $\varphi(\tau) = \tau' \cap \varphi(N_{\mathbf{R}})$ であるから

$$\{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\} = \{\sigma' \cap \varphi(N_{\mathbf{R}}) \mid \sigma' \in \Delta'\}$$

が成り立つ. ∎

系 2.14 N の有限で破れのない扇 Δ に対し, 次は同値である.

(i) Δ は超平面配置で決まる扇である.

(ii) ある自然数 s があって, s 次元自由 $\mathbf{Z}$ 加群 $N' := \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{Z} e_i$ の, 互いに直交する s 個の超平面からなる超平面配置で決まる扇 $\Delta' := \prod_{i=1}^{s} \{\mathbf{R}_{\geq 0}\, e_i, -\mathbf{R}_{\geq 0}\, e_i, \{0\}\}$ に対し, 単射な扇の写像 $\varphi : (N, \Delta) \to (N', \Delta')$ が存在し,

$$\{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\} = \{\sigma' \cap \varphi(N_{\mathbf{R}}) \mid \sigma' \in \Delta'\}$$

が成り立つ.

(iii) $r \geq 3$ のとき, 任意の $\tau \in \Delta(r-1)$ に対し, 2 次元扇

$$\overline{\Delta}(\tau) := \{(\sigma + \mathbf{R}\,\tau)/\mathbf{R}\,\tau\ ;\ \sigma \in \Delta,\ \ \sigma \succ \tau\}$$

は原点対称である. すなわち, 任意の $\overline{\sigma} \in \overline{\Delta}(\tau)$ に対し, $-\overline{\sigma} \in \overline{\Delta}(\tau)$ が成り立つ.

(iv) $2 \leq j \leq r$ なる自然数 j があって, 任意の $\tau \in \Delta(r-j)$ に対し, $\overline{\Delta}(\tau)$ は超平面配置で決まる扇である.

命題 2.15 超平面配置で決まる扇 Δ に対し, 記号は補題 2.12 の直前で定めた通りとする. $\varphi:(N,\Delta)\to(N',\Delta')$ は扇の写像であるから, 対応するトーリック多様体間の同変正則写像

$$\varphi_*: X\to X' := T_{N'}\operatorname{emb}(\Delta')$$

が存在する. φ_* が閉埋め込みになるための必要十分条件は任意の $\sigma\in\Delta(r)$ を $\varepsilon_i\in\{1,-1\}, 1\le i\le s$ を用いて $\sigma^\vee=\sum_{i=1}^s \mathbf{R}_{\ge 0}\,\varepsilon_i m_i$ と表わしたとき,

$$\sigma^\vee\cap M=\sum_{i=1}^s \mathbf{Z}_{\ge 0}\varepsilon_i m_i$$

が成り立つことである.

証明 [O88, pp.82–83] により, φ_* が閉埋め込みになるための必要十分条件は, 任意の $\sigma\in\Delta(r)$ に対し, $\varphi(\sigma)\subset\sigma'$ なる $\sigma'\in\Delta'$ を選んだとき, $\varphi^*((\sigma')^\vee\cap M')=\sigma^\vee\cap M$ となることである. $\sigma^\vee=\sum_{i=1}^s \mathbf{R}_{\ge 0}\,\varepsilon_i m_i$ のとき, $\sigma':=\sum_{i=1}^s \mathbf{R}_{\ge 0}\,\varepsilon_i e_i\in\Delta'(s)$ とすると $(\sigma')^\vee=\sum_{i=1}^s \mathbf{R}_{\ge 0}\,\varepsilon_i e_i^*$ であり, $\varphi^*((\sigma')^\vee)=\sigma^\vee$ であるから $\varphi(\sigma)\subset\sigma'$ である. そして,

$$\varphi^*((\sigma')^\vee\cap M')=\sum_{i=1}^s \mathbf{Z}_{\ge 0}\varepsilon_i m_i$$

であるから主張が成立する. ∎

系 2.16 $\varphi^*(\square'\cap M')=\square\cap M$ であれば, φ_* は閉埋め込みである.

証明 任意の $\sigma\in\Delta(r)$ をとり, 今までと同様に $\varepsilon_i\in\{1,-1\}\,(1\le i\le s)$ を用いて$\sigma^\vee=\sum_{i=1}^s \mathbf{R}_{\ge 0}\,\varepsilon_i m_i$ と表わす. $\varphi^*(\square'\cap M')=\square\cap M$ であるから $\varphi^*(\square'\cap M'-\sum_{i=1}^s\varepsilon_i e_i^*)=\square\cap M-\sum_{i=1}^s\varepsilon_i m_i$ が成り立つ. 命題 2.10 の証明により, $\square\cap M-\sum_{i=1}^s\varepsilon_i m_i$ は半群として $\sigma^\vee\cap M$ を生成する. よって, $\varphi^*((\sigma')^\vee\cap M')=\sigma^\vee\cap M$ が成り立つ. ∎

系 2.17 X が非特異なら, φ_* は閉埋め込みである.

証明 任意の $\sigma\in\Delta(r)$ に対し, $\varepsilon_i\in\{1,-1\}$ があって $\sigma^\vee=\sum_{i=1}^s \mathbf{R}_{\ge 0}\,\varepsilon_i m_i$ と表わされる. X が非特異であれば, これらの $\varepsilon_1 m_1,\dots,\varepsilon_s m_s$ は $\sigma^\vee\cap M$ を生成する. すなわち, $\sigma^\vee\cap M=\sum_{i=1}^s \mathbf{Z}_{\ge 0}\varepsilon_i m_i$ が成り立つ. 命題 2.15 により, φ_* は閉埋め込みである. ∎

3 quiverから決まる超平面配置とトーリック多様体

この節では, quiver から組織的に 2 種類の超平面配置を定義し, それらから決まるトーリック多様体の特徴を, quiver の組合せ論的情報により記述することを考える.

定義 3.1 quiver とは, 多重辺, ループを許す, 有限多重グラフのこととする. すなわち有限個の点 I と, 有限個の辺 J の組 $\Gamma = \{I, J\}$ であって, J の各辺に対し, その始点を対応させる写像と, 終点を対応させる写像が定まっているものを言う.

Γ に対し, 鎖複体 $C_{\cdot}(\Gamma, \mathbf{Z})$ を次のように定義する : $C_0(\Gamma, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}\, v_i$, $C_1(\Gamma, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{j\in J} \mathbf{Z}\, e_j$ とし, 境界写像 $\partial : C_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \to C_0(\Gamma, \mathbf{Z})$ を, $j \in J$ の始点が i, 終点が i' のとき $\partial e_j = v_i - v_{i'}$ と定める.

$C_0(\Gamma, \mathbf{Z})$, $C_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ の自然な $\mathbf{Z}$ 基底により自然に $C_0(\Gamma, \mathbf{Z})$ の双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle$ と $C_1(\Gamma. \mathbf{Z})$ の双線形写像 $(\ ,\ )$ が次を満たすものとして定まる.

$$\langle v_i, v_{i'} \rangle = \delta_{ii'}, \quad (e_j, e_{j'}) = \delta_{jj'}$$

これらの双線形写像により, 鎖複体 $C_{\cdot}(\Gamma, \mathbf{Z})$ と双対鎖複体 $C^{\cdot}(\Gamma, \mathbf{Z})$ とを同一視する. 双対境界写像 $\delta : C^0(\Gamma, \mathbf{Z}) \to C^1(\Gamma, \mathbf{Z})$ は次のようになる.

$$\delta v_i = \sum_{j\in J} \langle v_i, \partial e_j \rangle e_j$$

ここで, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\rho} & C^1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \supset & \delta C^0(\Gamma, \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\delta} & C^0(\Gamma, \mathbf{Z}) \\
 & & \upharpoonleft\!\downharpoonright (\ ,\ ) & & & & \upharpoonleft\!\downharpoonright \langle\ ,\ \rangle \\
H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \subset & C_1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\partial} & \partial C_1(\Gamma, \mathbf{Z}) & \subset & C_0(\Gamma, \mathbf{Z})
\end{array}$$

$(\ ,\ )$ は自然に部分空間 $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ の双線形写像となり, また自然に商空間 $H^1(\Gamma, \mathbf{Z})$ の双線形写像となる. よって, 自然に双線形写像 $(\ ,\ ) : H^1(\Gamma, \mathbf{Z}) \times H_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ が得られる. こうして $H^1(\Gamma, \mathbf{Z})$ は $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ の双対自由 $\mathbf{Z}$ 加群と考えられる. 同様にして, 自然に双線形写像 $\langle\ ,\ \rangle : \partial C_1(\Gamma, \mathbf{Z}) \times C^0(\Gamma, \mathbf{Z})/H^0(\Gamma, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ が得られ, $C^0(\Gamma, \mathbf{Z})/H^0(\Gamma, \mathbf{Z})$ は $\partial C_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ の双対自由 $\mathbf{Z}$ 加群と考えられる. $\partial C_1(\Gamma, \mathbf{Z})$ と $\delta C^0(\Gamma, \mathbf{Z})$ とも互いに双対である.

$H^1(\Gamma,\mathbf{R})=C^1(\Gamma,\mathbf{R})/\delta C^0(\Gamma,\mathbf{R})$ の zonotope $\square$ と $\partial C_1(\Gamma,\mathbf{R})$ の zonotope $\square'$ を

$$\square=\sum_{j\in J}[-\rho e_j,\rho e_j],\quad \square'=\sum_{j\in J}[-\partial e_j,\partial e_j]$$

とする. 但し, $[-e,e]=\{te \mid -1\le t\le 1\}$ である.

$\square$ から双対的に定まる $H_1(\Gamma,\mathbf{R})$ 内の超平面配置から決まる扇を Δ, $\square'$ から双対的に定まる $C^0(\Gamma,\mathbf{R})/H^0(\Gamma,\mathbf{R})$ 内の超平面配置から決まる扇を Δ' とする. Δ に付随するトーリック多様体を X, Δ' に付随するトーリック多様体を X' とする.

注 3.2 $(H^1(\Gamma,\mathbf{R}),\{\pm\rho e_j\mid j\in J\})$ は $(\partial C_1(\Gamma,\mathbf{R}),\{\pm\partial e_j\mid j\in J\})$ の線形 Gale 変換である. また, $\square$ は $\square'$ の zonal transform である. グラフ理論の基本的な結果により, Γ の連結成分の個数を c とすると $\dim\square=|J|-|I|+c$, $\dim\square'=|I|-c$ が成り立つ.

定義 3.3 **(i)** $\gamma\in H_1(\Gamma,\mathbf{Z})$ が cycle であるとは, 任意の $j\in J$ に対し $(\gamma,e_j)\in\{0,\pm1\}$ となるもののことを言う. 0 でない cycle γ が circuit であるとは, $\mathrm{supp}(\gamma_1)\cap\mathrm{supp}(\gamma_2)=\emptyset$ となる 0 でない cycle γ_1, γ_2 であって $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ となるものが存在しないことである. 但し, $\mathrm{supp}(\gamma)=\{j\in J\mid(\gamma,e_j)\neq0\}$ である.

(ii) $\omega\in\delta C^0(\Gamma,\mathbf{Z})$ が cocycle であるとは, 任意の $j\in J$ に対し $(\omega,e_j)\in\{0,\pm1\}$ となるもののことを言う. 0 でない cocycle ω が cocircuit であるとは, $\mathrm{supp}(\omega_1)\cap\mathrm{supp}(\omega_2)=\emptyset$ となる 0 でない cocycle ω_1, ω_2 であって $\omega=\omega_1+\omega_2$ となるものが存在しないことである. 但し, $\mathrm{supp}(\omega)=\{j\in J\mid(\omega,e_j)\neq0\}$ である.

定義 3.4 tree とは, cycle を持たない連結な quiver のことである. $\{I,T\}$ が Γ の spanning tree であるとは, $\Gamma=\{I,J\}$ の点を全て含み, $T\subset J$ であって, 更に tree になっているものを言う. Γ が連結とは限らないとき, Γ の各連結成分に制限すれば Γ の spanning tree になっているものを Γ の spanning forest と言う.

$\{I,T\}$ を spanning forest とする. このとき $H_1(\Gamma,\mathbf{Z})$ の $\mathbf{Z}$ 基底 $\{\gamma_{T,j}\,;\,j\in J\}$ と $\delta C^0(\gamma,\mathbf{Z})$ の $\mathbf{Z}$ 基底 $\{\omega_{T,t}\,;\,j\in J\}$ が次のように定まる (cf. [OS79, pp.21–22]) : $j\in J\setminus T$ に対し, Γ の spanning subquiver $\Gamma'=\{I,T\cup\{j\}\}$ は $H_1(\Gamma',\mathbf{Z})=1$ であるから $(\gamma_{T,j},e_j)=1$ なる circuit が 1 つ定まる. 同様に, $t\in T$ に対し Γ の spanning subquiver $\{I,T\setminus\{t\}\}$ は, $\{I,T\}$ の連結成分のちょうど 1 つを 2 つに分ける. $I_t\subset I$ を, その連結成分の中で, t が始点に持つ点全体とする. このとき $\omega_{T,t}=\delta(\sum_{i\in I_t}v_i)$ とする.

命題 3.5 (cf. [OS79, p.24, Proposition 5.2])

$$\Box = \{x \in H^1(\Gamma, \mathbf{R}) \mid (x, \gamma) \leq (\gamma, \gamma),\ \ \forall \gamma : \text{circuit}\}$$

が成り立つ. さらに, 任意の circuit γ に対し,

$$H_\gamma := \{x \in H^1(\Gamma, \mathbf{R}) \mid (x, \gamma) = (\gamma, \gamma)\}$$

は $\Box$ の支持超平面である.

$$\Box' = \{y \in \partial C_1(\Gamma, \mathbf{R}) \mid \langle y, \omega \rangle \leq \langle \omega, \omega \rangle,\ \ \forall \omega : \text{cocircuit}\}$$

が成り立つ. さらに, 任意の cocircuit ω に対し,

$$H'_\omega := \{y \in \partial C_1(\Gamma, \mathbf{R}) \mid \langle y, \omega \rangle = \langle \omega, \omega \rangle\}$$

は $\Box'$ の支持超平面である.

この命題 3.5 により, $\Box$ の facet(余次元 1 の面) と, Γ の circuit が 1 対 1 に対応する. 言いかえると, 扇 Δ の 1 次元有理強凸多面錐と, Γ の circuit が 1 対 1 に対応する. このことから, Δ の chamber(最高次の有理強凸多面錐) と, quiver Γ との対応を考える.

Γ の reorientation を考える. 辺 j の向きが変化しないとき $\varepsilon_j = 1$ とし, j の向きが変化するとき $\varepsilon_j = -1$ とし, この reorientation を $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ と表わす. このとき, $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ と $\sum_{j\in J} \varepsilon_j \rho e_j \in \Box$ を対応させる. 任意の circuit γ に対し, γ が $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ の向きを保つことと, γ に対応する $\Box$ の facet が点 $\sum_{j\in J} \varepsilon_j \rho e_j$ を含むことは同値である. 同様に, $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ と $\sum_{j\in J} \varepsilon_j \partial e_j \in \Box'$ を対応させる. cocircuit ω が $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ の向きを保つことと, ω に対応する $\Box'$ の facet が点 $\sum_{j\in J} \varepsilon_j \partial e_j$ を含むことは同値である. 双対を考えると次のことが言える.

命題 3.6 $(\sum_{j\in J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_j \rho e_j)^\vee$ が Δ の chamber であるための必要十分条件は, $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ の向きを保つ circuit 全体が $H^1(\Gamma, \mathbf{R})$ を生成することである. 同様に $(\sum_{j\in J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_j \partial e_j)^\vee$ が Δ' の chamber であるための必要十分条件は, $\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ の向きを保つ cocircuit 全体が $\partial C_1(\Gamma, \mathbf{R})$ を生成することである.

また, zonal transform の基本的な結果から次のことがわかる.

補題 3.7 (cf. [M71, p.103, Corollary]) $\varepsilon_j \in \{1,-1\}$ $(j \in J)$ に対し，次が成立する．

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} \varepsilon_j \rho e_j &: \square \text{ の頂点} &\iff& \sum_{j\in J} \varepsilon_j \partial e_j : \square' \text{の内点} \\
\sum_{j\in J} \varepsilon_j \rho e_j &: \square \text{ の内点} &\iff& \sum_{j\in J} \varepsilon_j \partial e_j : \square' \text{の頂点} \\
\sum_{j\in J} \varepsilon_j \rho e_j &: \square \text{ の境界上の点} &\iff& \sum_{j\in J} \varepsilon_j \partial e_j : \square' \text{の境界上の点}
\end{aligned}$$

このことから，命題 3.6 の後半は次のように言い換えることができる．

系 3.8 (cf. [OT92, P.57, Lemma 2.93]) $\varepsilon_j \in \{1,-1\}$ $(j \in J)$ に対し，$(\sum_{j\in J} \mathbf{R}_{\geq 0}\, \varepsilon_j \partial e_j)^\vee$ が Δ' の chamber であるための必要十分条件は，$\Gamma(\varepsilon_j)_{j\in J}$ が acyclic orientation であることである．

参考文献

[B69] E. D. Bolker, A class of convex bodies, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 323–345.

[M71] P. McMullen, On zonotopes, Trans. Amer. Math. Soc. 159 (1971), 91–109.

[O88] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry —An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergebnisse der Math.(3) 15, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.

[OS79] T. Oda and C. S. Seshadri, Compactifications of the generalised Jacobian variety, Trans. Amer. Math. Soc. 253 (1979), 1–90.

[OT92] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, New York, 1992.